Flugbahn eines Fußballs

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differentialgleichungen in 2D und 3D, Systeme von Differentialgleichungen
  Parameterdarstellung; Vektoren,
  Kinematik, unbestimmtes Integral

- Kurzzusammenfassung

  Schiefer Wurf als Differentialgleichung modellieren und verschiedene Variationen des Modells rechnergestützt untersuchen.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  Durch die Verwendung des Lösungsblocks kann das rechenintensive bzw. tw. nicht mögliche Lösen der Differentialgleichungssystemen deutlich vereinfacht werden.
  Die Ergebnisse können durch den Lösungsblock und odesolve einfach berechnet, graphisch dargestellt und auch als stetige (Interpolations-) Funktionen weiter verwendet werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  HTL Abteilungen, für die das Kapitel Differentialgleichungen im Lehrplan vorgesehen ist; vor allem in Maschinenbau, Mechatronik, ... als Erweiterung (Anwendungen des Fachbereichs)

- Mathcad-Version:

  Prime 3.1

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

http://www.thomas-wilhelm.net/veroeffentlichung/Fussball_Luft.pdf
http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/magnus-versuch.htm
http://systemdesign.ch/wiki/Fussball;
https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect
http://www.weltderphysik.de/gebiet/leben/fussball/rolle-des-luftwiderstands/
Buch: Metin Tolan - Manchmal gewinnt der Bessere (Die Physik des Fußballspiels)

Flugbahn eines Fußballs

Fußball ist ein - vor allem unter männlichen Jugendlichen - sehr populärer Sport und daher auch in den verschiedensten Medien präsent. Vielfach finden sich auf diversen Videoplattformen (youtube, ...) kurze Clips mit besonderen Szenen, bei denen häufig eine besondere Flugbahn des Balls zu beobachten ist.

Die Flugbahn eines Balls kann durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben werden, welche die einwirkenden Faktoren wie Gravitationskraft, Luftwiderstand, Gegen- Seiten- oder Rückenwind, Einfluss des Dralls (Magnuskraft) berücksichtigen.
Diese Differentialgleichungssysteme sind ausgehend vom 2. Newton'schen Axiom relativ leicht zu formulieren, allerdings ist die Lösung schwierig und zumeist nicht analytisch möglich. MCD liefert im Lösungsblock mit dem Befehl ODESOLVE ("OrdinaryDifferentialEquationSolve") eine auch für Schüler sehr einfach zu handhabende Möglichkeit zur numerischen Lösung derartiger Systeme, da die dazu notwendige Syntax der klassischen Schreibweise von DGL sehr ähnlich ist.
Weiters werden die Lösungen von MCD zu stetigen (Interpolations-) Funktionen verbunden, womit diese auch für klassische Rechenmethoden des Schulunterrichts (Differenzieren, Integrieren, Nullstellen, ...) verwendbar sind.

1. Die einwirkenden Kräfte

Je nach Modell können verschiedene Kräfte angenommen werden, die auf den Fußball einwirken.

1.1 Gravitationskraft

Die Gravitationskraft $F_G = m \cdot g$ wirkt senkrecht nach unten (zum Erdmittelpunkt hin) mit gleichbleibender Erdbeschleunigung von $g := 9.81$ m/s² und einer Masse von $m := 0.45$ kg lt. FIFA Regeln.

1.2 Luftwiderstand

Die Luftwiderstandskraft wirkt immer gegen die Bewegungsrichtung des Fußballs.
Um die Größe dieser Kraft zu bestimmen wird meist das Modell der Newton'schen Reibung verwendet.

Der Luftwiderstandskraft wird zumeist als proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit in der nachfolgendenden Form beschrieben (Newton'sche Reibung).

$$F_L = \frac{c_W \cdot A \cdot \rho \cdot v^2}{2}$$

F_L ... Kraft des Luftwiderstands in N
c_W ... Widerstandsbeiwert (Form des Körpers; ca. 0,2 für einen Fußball)
A ... Querschnittsfläche ($A := \left(\frac{0.7}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0.039$ m² bei 70 cm Umfang lt. FIFA)
ρ ... Dichte der Luft ($\rho := 1.2$ kg/m³)
v ... Geschwindigkeit in m/s

Metin Tolan argumentiert anhand verschiedener Messergebnisse (u.a. John Wesson: Fußball - Wissenschaft mit Kick; Von der Physik fliegender Bälle und der Statistik des Spielausgangs), dass die Stokesche Reibung besser geeignet ist den Luftwiderstand eines Fußballs zu beschreiben. In diesem Modell wird angenommen, dass die Widerstandskraft und die Geschwindigkeit direkt proportional sind.

$$F_L = \beta \cdot v$$

F_L ... Kraft des Luftwiderstands in N
β ... Widerstandsbeiwert (lt. Metin Tolan ca. 0,142 N.s/m)
v ... Geschwindigkeit in m/s

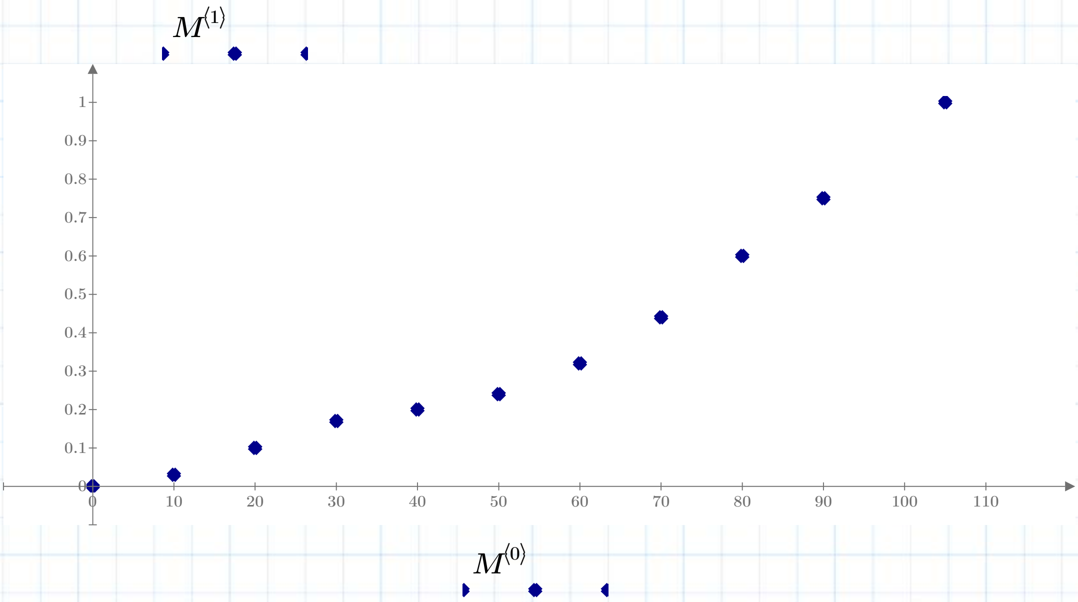
Die nachfolgenden Tabelle gibt Messwerte an, die ungefähr den Untersuchungen von John Wesson für den Luftwiderstand eines Fußballs entsprechen.
1.Spalte: Geschindigkeit in km/h
2.Spalte: Luftwiderstand in Vielfachen der Gewichtskraft ($F_G := m \cdot g = 4.415$ N)

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0.03 \\ 20 & 0.1 \\ 30 & 0.17 \\ 40 & 0.2 \\ 50 & 0.24 \\ 60 & 0.32 \\ 70 & 0.44 \\ 80 & 0.6 \\ 90 & 0.75 \\ 105 & 1 \end{bmatrix}$$

Die nachstehende graphische Darstellung der Messwerte legt die folgenden Modellfunktionen nahe:

- lineare homogene Regressionfunktion des Typs $y = k \cdot x$ (Modell der Stokeschen Reibung)
- quadratische Potenzregresion des Typs: $y = a \cdot x^2$ (Modell der Newton'schen Reibung)
- Polynomregression (3.Grades) (ein ungefähr s-förmiger Verlauf)
- kubischer Spline (Verlauf durch die einzelnen Messpunkte)

Darstellung der Messwerte: waagrecht ist die Geschwindigkeit in km/h nach oben die Luftwiderstandskraft in Vielfachen der Gewichtskraft des Balls aufgetragen.



homogene lineare Regression

$$\Delta(k) := \sum_{i=0}^{10} \left(M_{i,1} - k \cdot \frac{M_{i,0}}{3.6} \right)^2$$

Summe der quadrierten Abstände

$$\Delta 1(k) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \Delta(k)$$

1.Ableitung

$$k_{min} := \Delta 1(k) = 0 \xrightarrow{solve, k} 0.02713320683111954592$$

$$k_{min} \cdot F_G = 0.12$$

Im Vergleich zu Metin Tolan kommt hier ein etwas geringerer Widerstandsbeiwert heraus.

$$F_{Llin}(v) := k_{min} \cdot v$$

Dieser wird für das lineare Modell des Luftwiderstandes verwendet.

quadratische Potenzregression

$$\Delta(a) := \sum_{i=0}^{10} \left(M_{i,1} - a \cdot \left(\frac{M_{i,0}}{3.6} \right)^2 \right)^2$$

Summe der quadrierten Abstände

$$\Delta 1(a) := \frac{d}{da} \Delta(a)$$

1.Ableitung

$$a_{min} := \Delta 1(a) = 0 \xrightarrow{solve, a} 0.0011958552553494812521$$

$$F_{LP2}(v) := a_{min} \cdot v^2$$

Ein Vergleich der Formeln liefert eine Schätzung des c_W Wertes, der gut mit den in der Literatur verwendeten Werten von ca. 0,2 übereinstimmt:

$$F_G \cdot a_{min} \cdot v^2 = \frac{c_W \cdot A \cdot \rho \cdot v^2}{2} \xrightarrow{solve, c_W} 0.22564341877643179873$$

Polynom 3.Grades

$$L := \text{regress}\left(\frac{M^{\langle 0 \rangle}}{3.6}, M^{\langle 1 \rangle}, 3 \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 7.702 \cdot 10^{-4} \\ 0.016 \\ -2.327 \cdot 10^{-4} \\ 2.951 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$F_{LP3}(v) := \sum_{i=0}^{3} L_{i+3} \cdot v^i$$

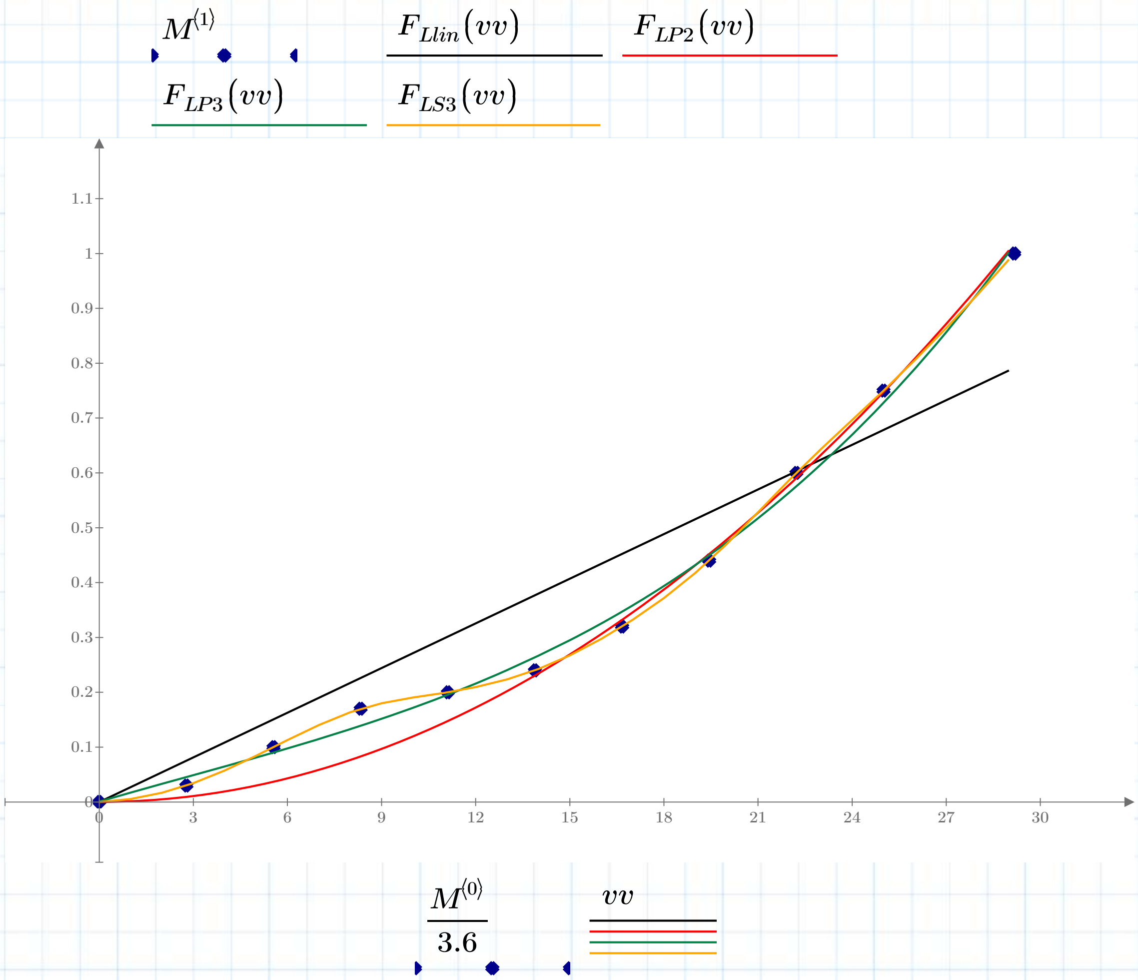
kubischer Spline

$$C := \text{pspline}\left(\frac{M^{\langle 0 \rangle}}{3.6}, M^{\langle 1 \rangle} \right)$$

$$F_{LS3}(v) := \text{interp}\left(C, \frac{M^{\langle 0 \rangle}}{3.6}, M^{\langle 1 \rangle}, v \right)$$

Graphische Darstellung der Luftwiderstandskraft

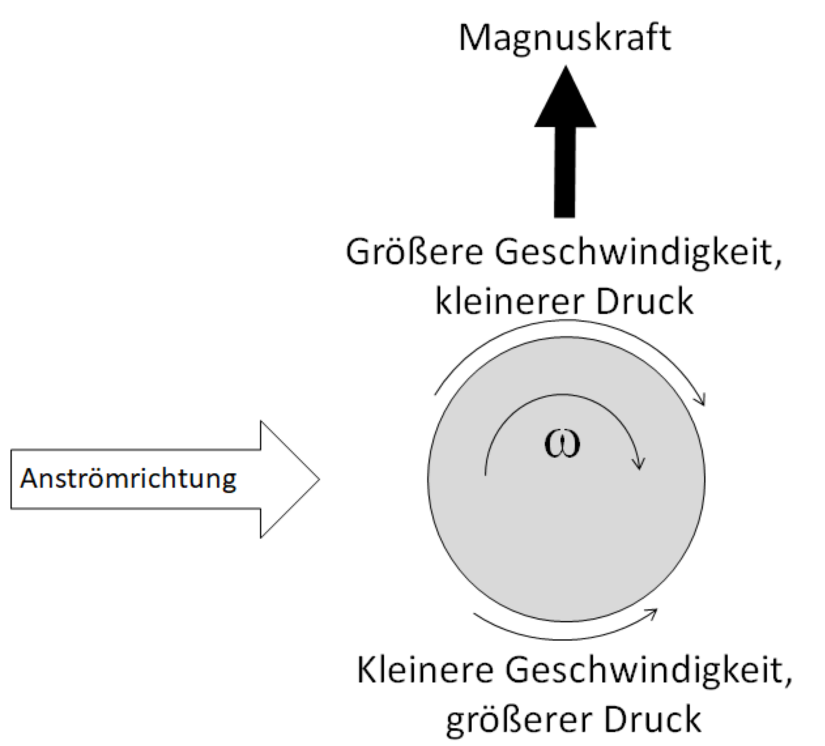
$$vv := 0, 1 .. \frac{105}{3.6}$$



In der obenstehenden Graphik ist auf der senkrechten Achse die Luftwiderstandskraft in Vielfachen der Gewichtskraft des Fußballs und auf der waagrechten Achse die Geschwindigkeit **in m/s** aufgetragen.
Deutlich zu erkennen ist, dass das lineare Modell eine eher grobe Vereinfachung darstellt, und das quadratischen Modell vor allem für größere Geschwindigkeiten gut passt. Die Polynomregression bildet den s-förmigen Verlauf grob ab, die Spline geht etwas "wellig" durch alle Messpunkte, wobei es für diese beiden Varianten kein theoretisches Modell gibt.

1.3 Magnuskraft

Durch die Eigenrotation des Fußballs um eine beliebige Achse wird eine quer zur Rotationsachse wirkende Kraft hervorgeruften, die im 19. Jahrhundert von Heinrich Gustav Magnus untersucht wurde.
Die Eigenrotation ändert die relative Geschwindigkeit der vorbeiströmenden Luft zur Oberfläche. Mithilfe der Bernoulligleichung lässt sich zeigen, dass diese Geschwindigkeitsunterschiede zu einer Druckdifferenz und damit zur sogenannten Magnuskraft führt, die quer zur Bewegungsrichtung und zur Rotationsrichtung wirkt.



Die Magnuskraft ergibt sich vektoriell durch die folgende Formel:

$$\overrightarrow{F_M} = C \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$$

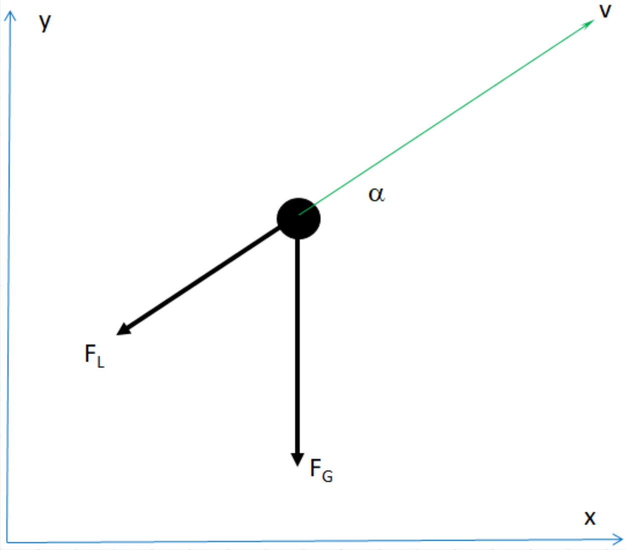
$\overrightarrow{F_M}$ .... Magnuskraft in N (normal zu $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$)
C ... Konstante (für Ball/Kugel häufig $C = \pi^2 \cdot r^3 \cdot \rho$)
$\vec{v}$ ... (Anström-)Geschwindigkeit der Luft in m/s (= Geschwindigkeit des Balls)
$\vec{\omega}$ ... Winkelgeschwindigkeit der Rotation in rad/s

2. Flugbahnen in der Ebene (2D)

2.1 Flugbahn eines Balls mit Luftwiderstand

2.1.1 Differentialgleichung der Flugbahn mit Luftwiderstand

Die auf eine Masse während der Bewegung wirkenden Kräfte sind in der nachfolgenden Skizze dargestellt. In Richtung der Koordinatenachsen gilt unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Koordinaten.



$$m \cdot a_x = -F_{Lx}$$

$$m \cdot a_y = -F_{Ly} - F_G$$

bzw.

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = -F_L \cdot cos(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = -F_L \cdot sin(\alpha) - F_G$$

$$sin(\alpha) = \frac{v_y}{v} \qquad cos(\alpha) = \frac{v_x}{v}$$

somit gilt speziell für Newton'sche Reibung (= Standardmodell):

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = -K \cdot v^2 \cdot \frac{v_y}{v} = -K \cdot v \cdot v_x$$

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = -K \cdot v^2 \cdot \frac{v_x}{v} - m \cdot g = -K \cdot v \cdot v_x - m \cdot g$$

2.1.1 Numerische Lösung mit Lösungsblock

Die Lösungen dieses DGL-Systems werden nachfolgend im Vergleich zur klassischen Wurfparabel (ohne Luftwiderstand) und für verschiedenen Möglichkeiten der Luftreibung berechnet. Für das klassische Modell der Newton'schen Reibung wird weiters der Abschusswinkel variiert um dessen Einfluss auf die Wurfweite zu untersuchen.

Für die numerische Lösung werden die folgenden Konstanten verwendet:

Erdbeschleunigung: $g = 9.81$ m/s²
Masse des Balls lt. FIFA von 410 - 450g: $m = 0.45$ kg
Umfang des Balls lt. FIFA 68,5 - 70 cm:
Luftwiderstandsbeiwert ca. 0,2
Der Faktor K des Luftwiderstandes ergibt $K := \frac{0.225 \cdot \rho \cdot A}{2} = 0.005$

Die Abschussgeschwindigkeit v0 ist ja nach Art des Schusses ca. 100 km/h, kann aber auch noch deutlich höher sein: $v0 := 30$ m/s
Der Abschusswinkel α beim Abstoß sollte zwischen 30° und 45° liegen um eine optimale Schussweite zu erreichen (siehe Metin Tolan) und wird in den nachfolgenden Szenarien variiert um den Zusammenhang mit der Wurfweite zu erkunden.
Anmerkung: MCD kann DGL in einer Funktion mit ODESOLVE auch parametrisch lösen, bei zwei oder mehr Funktionen ist dies leider nicht mehr möglich. Daher muss der Lösungsblock nachfolgend mehrmals angeschrieben werden.

Die Flugzeit tmax ist in den einzelnen Szenarien unterschiedlich und leider nicht im Voraus bekannt - **tmax muss durch Probieren so gewählt werden, dass jeweils die Flugzeit und die Wurfweite berechnet werden kann.**
Für die graphische Darstellung wird die Laufvariable tt definiert.

Folgende Szenarien werden nachfolgend berechnet und dann auch graphisch dargestellt:

Szenario 1-3: klassisches Modell der Newton'schen Reibung mit verschiedenen Abschusswinkeln von 35°, 40° und 45°,
Szenario 4: Luftwiderstand mit Stoke'sche Reibung modelliert
Szenario 5: Luftwiderstand mit Regressionspolynom modelliert
Szenario 6: Luftwiderstand mit Spline modelliert
Szenario 7: klassische Wurfparabel.

Szenario 1: $\alpha := 35\ °$ $tmax := 4.5$ $tt := 0, 0.1 .. tmax$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vx(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vx1 \\ vy1 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 2: $\alpha := 40\ °$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vx(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vx2 \\ vy2 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 3: $\alpha := 45\,°$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vx(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vx3 \\ vy3 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 4: $\alpha := 45\,°$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -0.12 \cdot vx(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -0.12 \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxl \\ vyl \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Luftwiderstand linear, entsprechend dem von Metin Tolan verwendeten Modell.

Ohne Luftwiderstand
"Wurfparabel"

Szenario 5: $\alpha := 45\ °$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -F_{LP3}\left(\left(\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}\right)\right) \cdot \frac{vx(t) \cdot F_G}{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}}$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -\left(F_{LP3}\left(\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}\right)\right) \cdot \frac{vy(t) \cdot F_G}{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}} - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxP3 \\ vyP3 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 6: $\alpha := 45\ °$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -F_{LS3}\left(\left(\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}\right)\right) \cdot \frac{vx(t) \cdot F_G}{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}}$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -\left(F_{LS3}\left(\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}\right)\right) \cdot \frac{vy(t) \cdot F_G}{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}} - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxS3 \\ vyS3 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 7: $\alpha := 45\ °$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = 0$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxo \\ vyo \end{bmatrix} := \textbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Ohne Luftwiderstand
"Wurfparabel"

Die den Geschwindigkeitsfunktionen entsprechenden Wegfunktionen können einfach über das unbestimmte Integral berechnet werden. (für s(0) =0)

$$sx1(t) := \int_0^t vx1(t\_)\, dt\_ \qquad sy1(t) := \int_0^t vy1(t\_)\, dt\_$$

$$sx2(t) := \int_0^t vx2(t\_)\, dt\_ \qquad sy2(t) := \int_0^t vy2(t\_)\, dt\_$$

$$sx3(t) := \int_0^t vx3(t\_)\, dt\_ \qquad sy3(t) := \int_0^t vy3(t\_)\, dt\_$$

$$sxl(t) := \int_0^t vxl(t\_)\, dt\_ \qquad syl(t) := \int_0^t vyl(t\_)\, dt\_$$

$$sxP3(t) := \int_0^t vxP3(t\_)\, dt\_ \qquad syP3(t) := \int_0^t vyP3(t\_)\, dt\_$$

$$sxS3(t) := \int_0^t vxS3(t\_)\, dt\_ \qquad syS3(t) := \int_0^t vyS3(t\_)\, dt\_$$

$$sxo(t) := \int_0^t vxo(t\_)\, dt\_ \qquad syo(t) := \int_0^t vyo(t\_)\, dt\_$$

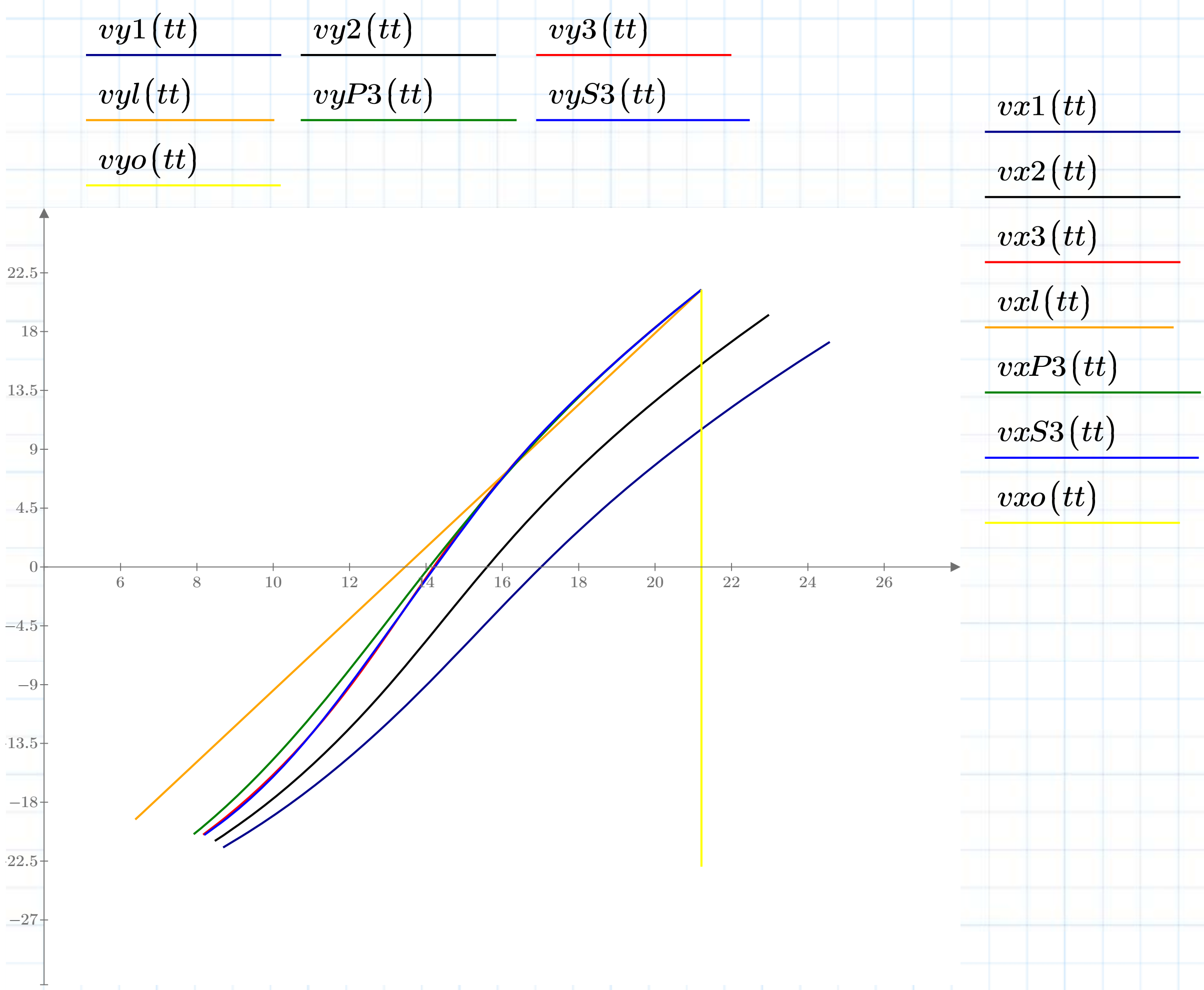
Nachfolgend sind die Flugzeiten und die entsprechenden Wurfweiten berechnet.

$t1 := \mathbf{root}(sy1(t\_), t\_, 1, tmax)$	$t1 = 3.022$	$sx1(t1) = 52.179$
$t2 := \mathbf{root}(sy2(t\_), t\_, 1, tmax)$	$t2 = 3.349$	$sx2(t2) = 53.027$
$t3 := \mathbf{root}(sy3(t\_), t\_, 1, tmax)$	$t3 = 3.651$	$sx3(t3) = 52.595$
$tl := \mathbf{root}(syl(t\_), t\_, 1, tmax)$	$tl = 3.72$	$sxl(tl) = 50.048$
$tP3 := \mathbf{root}(syP3(t\_), t\_, 1, tmax)$	$tP3 = 3.663$	$sxP3(tl) = 52.706$
$tS3 := \mathbf{root}(syS3(t\_), t\_, 1, tmax)$	$tS3 = 3.654$	$sxS3(tl) = 53.311$
$to := \mathbf{root}(syo(t\_), t\_, 1, tmax)$	$to = 4.325$	$sxo(to) = 91.743$

Auffallend sind die beinahe doppelt so große Wurfweite bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes (*sxo*) und das etwas geringere Ergebnis bei Verwendung der Stokesschen Reibung (*sxl*). Alle anderen Berechnungen liefern relativ ähnliche Ergebnisse bei der Wurfweite.

2.1.2 Graphische Darstellung der Ergebnisse

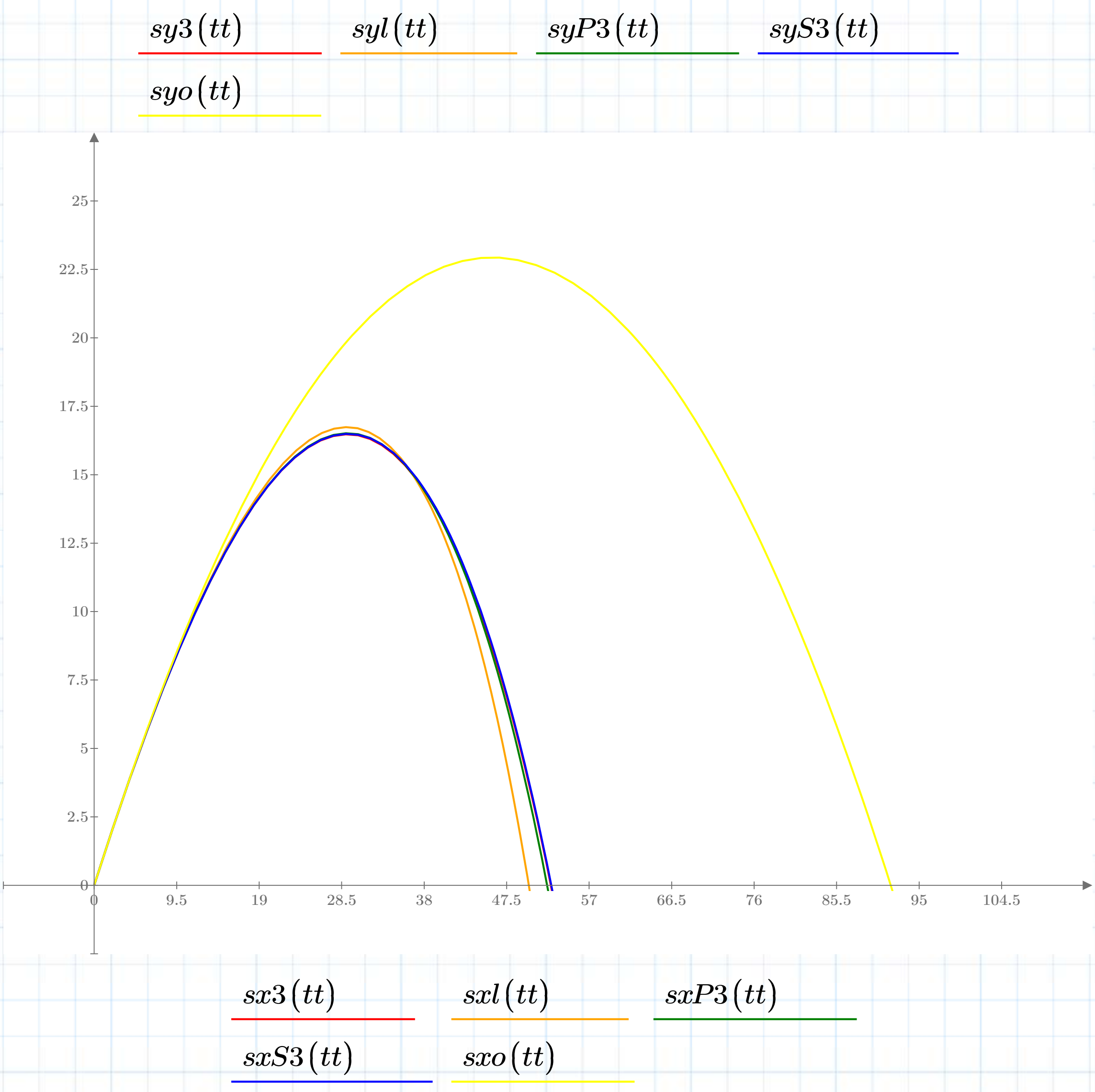
Verläufe der Geschwindigkeiten der einzelnen Szenarien



Die obige Darstellung zeigt die Geschwindigkeitsfunktionen der einzelnen Szenarien in parametrischer Darstellung. Die einzelnen Kurven sind von rechts-oben (t = 0 -> Anfangsbedingung) nach links-unten (Ende der Bewegung) zu lesen. Fünf Kurven starten im gleichen Punkt, da der Abschusswinkel immer 45° beträgt, bei den beiden anderen sind die Abschusswinkel kleiner und daher ist vx0 größer und vy0 kleiner.
Beide Komponenten der Geschwindigkeit (mit Ausnahme von Szenario 7 = Wurfparabel) nehmen mit der Zeit ab. Die Kurve entspricht der Steigung der Bahnkurve zum entsprechenden Zeitpunkt.
Bei den Nullstellen der Kurven (vy = 0) werden die maximalen Höhen der Bahnkurven erreicht, davor (bei kleineren Zeiten) sind die vy-Werte positiv und daher ist die Bahnkurve monoton steigend, danach negativ und die Bahnkurve somit monoton fallend.

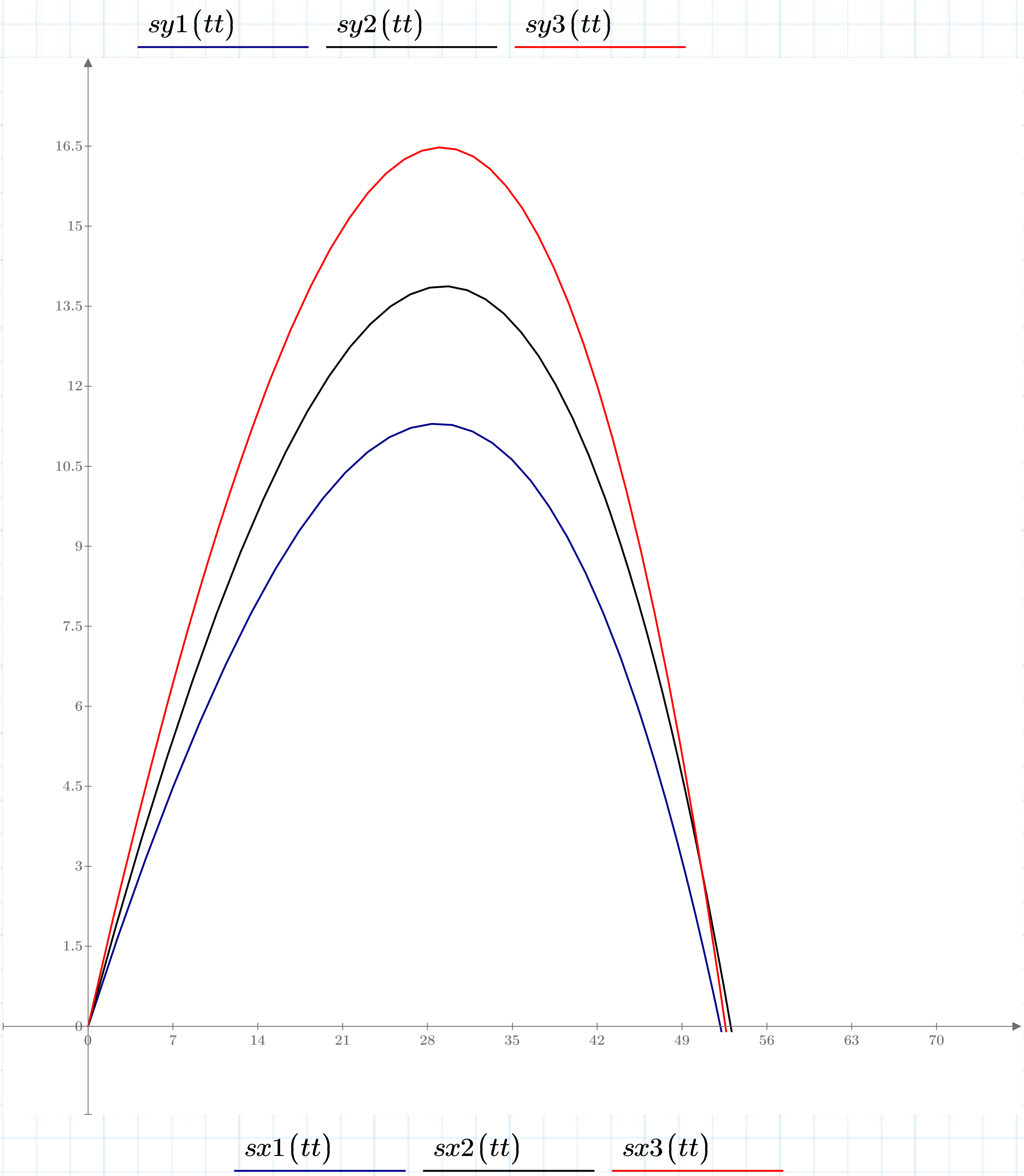
Auffallend sind die Szenarien 4 und 7, die als Geradenstücke dargestellt werden.
Bei Szenario 7 bleibt die vx-Komponente gleich, da es keinen Luftwiderstand gibt, bei Szenario 4 zeigt sich die Linearität der Stoke'schen Kraft auch hier.
Weiters ist festzustellen, dass die Flugkurven bei Szenario 3, 5 und 6 relativ ähnlich sind.
Auch die Aufprallgeschwindigkeiten sind bei allen gekrümmten Verläufen relativ ähnlich.

Bahnkurven bei einem Abwurfwinkel von 45°



Die dargestellten Bahnkurven für den Abwurfwinkel 45° zeigen, dass die Wurfparabel unrealistisch ist und auch das Modell der Stokeschen Reibung etwas abweicht. Die anderen Varianten liefern relativ ähnliche Verläufe.
Klar erkennbar ist auch der durch den Luftwiderstand bedingte steilere Abfall im Vergleich zur Wurfparabel.

Bahnkurven mit Newton'scher Reibung und verschiedenen Abwurfwinkeln



Trotz verschiedener Abwurfwinkel sind im Bereich von 35° - 45° die Wurfweiten relativ ähnlich. Die maximale Wurfweite hat in diesem Bereich ein schwach ausgeprägtes Maximum, dessen Stelle je nach Wahl der Parameter leicht variiert. Da das Bestimmen der einzelnen Parameter relativ ungenau ist, erscheint die Angabe eines Bereichs für den Abschusswinkel der maximalen Wurfweite durchaus sinnvoll.

2.2 Flugbahn eines Balls mit Luftwiderstand und Wind

2.2.1 Differentialgleichung der Flugbahn mit Luftwiderstand und Wind

Auf Youtube findet sich ein durch sehr starken Gegenwind beim Abstoß verursachtes Eigentor (https://www.youtube.com/watch?v=vFbM1cfR80g). Der Ball ändert durch den starken Gegenwind auch das Vorzeichen der Geschwindigkeit in x-Richtung und trifft mit negativer Geschwindigkeit vx wieder im Strafraum auf und springt ins eigene Tor.

Der waagrechte Wind w kann relativ einfach in das DGL-system integriert werden, indem die x-Komponente der Geschwindigkeit um den Windanteil w vergrößert/vermindert wird. Im Folgenden werden zwei Szenarien bei gleichem Abschusswinkel $\alpha := 40\,°$ und Abschussgeschwindigkeit $v0 = 30$ m/s mit Gegen/Rücken-Wind im Vergleich zur Flugbahn ohne Wind betrachtet.

$tmax := 3.5$ $\qquad$ $tt := 0, 0.1 .. tmax$

Szenario 8: $\qquad w := -25$ $\qquad$ Gegenwind

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{(vx(t) - w)^2 + vy(t)^2} \cdot (vx(t) - w)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{(vx(t) - w)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxw1 \\ vyw1 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Szenario 9: $w := 10$ Rückenwind

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{(vx(t)-w)^2 + vy(t)^2} \cdot (vx(t) - w)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{(vx(t)-w)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxw2 \\ vyw2 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

$$sxw1(t) := \int_0^t vxw1(t\_)\, dt\_ \qquad syw1(t) := \int_0^t vyw1(t\_)\, dt\_$$

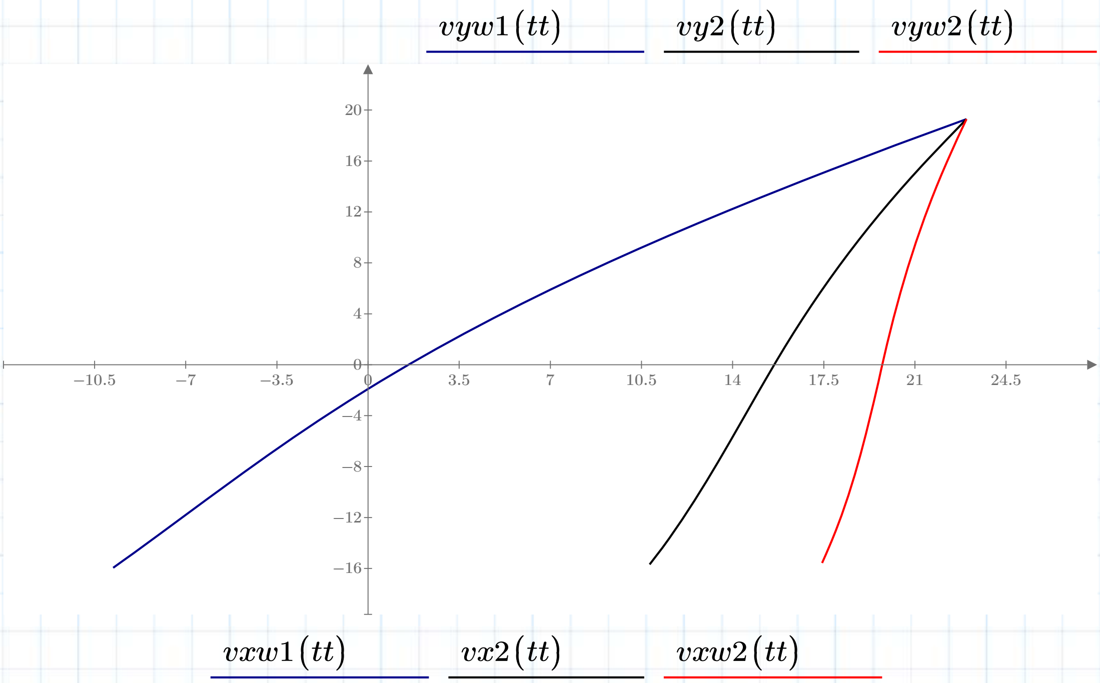
$$sxw2(t) := \int_0^t vxw2(t\_)\, dt\_ \qquad syw2(t) := \int_0^t vyw2(t\_)\, dt\_$$

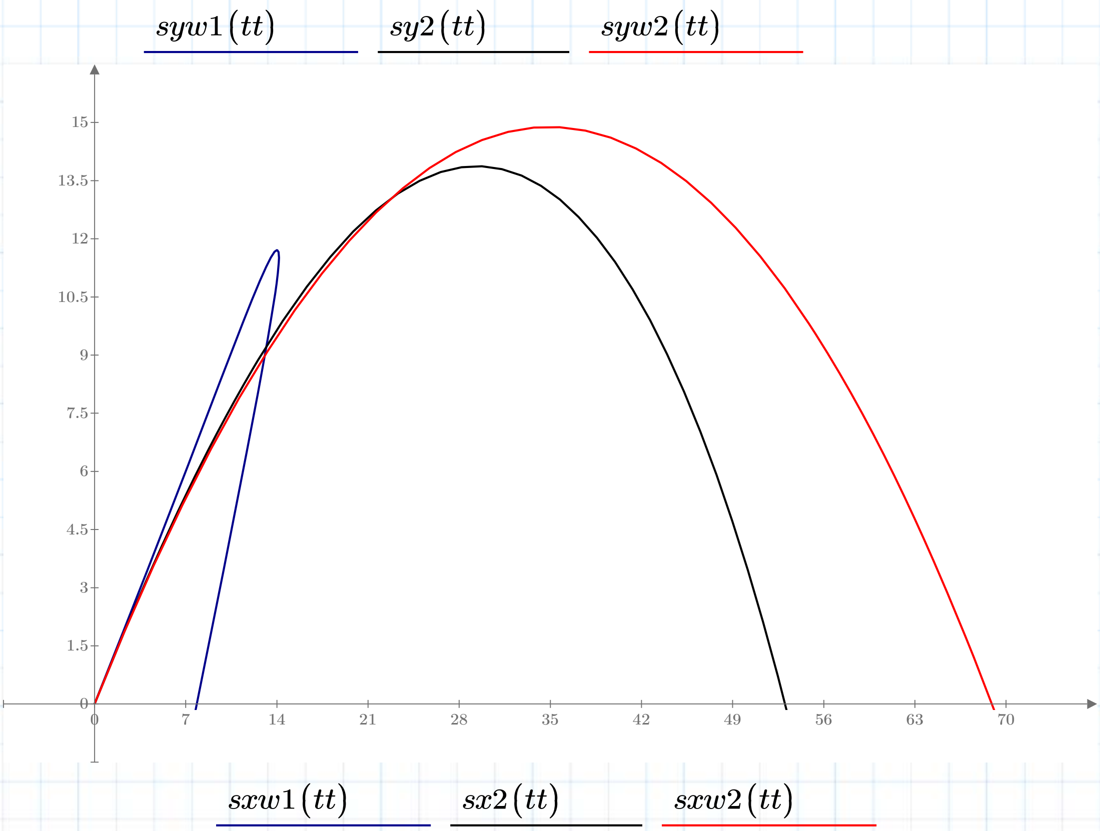
$$tw1 := \mathbf{root}(syw1(t\_), t\_, 1, tmax) \qquad tw1 = 3.053 \qquad sxw1(tw1) = 7.847$$

$$tw2 := \mathbf{root}(syw2(t\_), t\_, 1, tmax) \qquad tw2 = 3.479 \qquad sxw2(tw2) = 68.915$$

Während die Flugzeiten in beiden Varianten (vor allem bei Rückenwind) relativ ähnlich zur Variante ohne Wind ist, unterscheiden sich die Wurfweiten sehr deutlich.
(Zum Vergleich ohne Wind: Flugzeit $t2 = 3.349$ s und Wurfweite $sx2(t2) = 53.027$ m)

Nachfolgend sind wieder die Geschwindigkeiten in parametrischer Form und die Flugbahnen graphisch dargestellt.
Deutlich zu erkennen ist, dass vx bei Gegenwind auch negativ werden kann.


vyw1(tt)
vy2(tt)
vyw2(tt)
20
16
12
8
4
0
−4
−8
−12
−16
−10.5
−7
−3.5
0
3.5
7
10.5
14
17.5
21
24.5
vxw1(tt)
vx2(tt)
vxw2(tt)

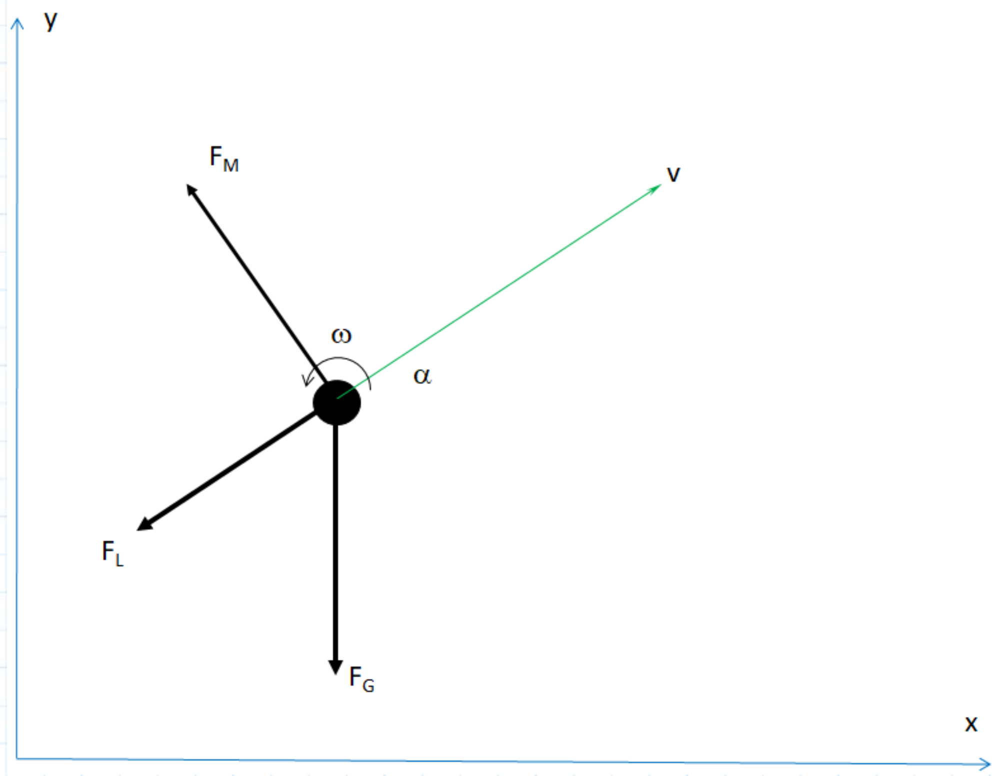

syw1(tt)
sy2(tt)
syw2(tt)
15
13.5
12
10.5
9
7.5
6
4.5
3
1.5
0
0
7
14
21
28
35
42
49
56
63
70
sxw1(tt)
sx2(tt)
sxw2(tt)

2.3 Flugbahn eines Balls mit Luftwiderstand und Magnuskraft

2.3.1 Differentialgleichung der Flugbahn mit Luftwiderstand und Magnuskraft (Rotationachse waagrecht und normal zur Flugrichtung)

Die Magnuskraft $\overrightarrow{F_M}$ wirkt entsprechend dem Vektorprodukt von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{\omega}$ rechtwinkelig zu den beiden Vektoren und daher bei "Backspin" wie in der Graphik dargestellt. Die Komponenten von $\overrightarrow{F_M}$ ergeben sich als Normalvektor zur Richtung der Geschwindigkeit v.

$$\overrightarrow{F_M} = \begin{bmatrix} -vy \\ vx \end{bmatrix} \cdot \frac{F_M}{v} = \begin{bmatrix} -vy \\ vx \end{bmatrix} \cdot \frac{C \cdot v \cdot \omega}{v} = \begin{bmatrix} -vy \\ vx \end{bmatrix} \cdot C \cdot \omega$$



Im Folgenden werden für einen Abschusswinkel $\alpha := 40$ ° und Anfangsgeschwindigkeit $v0 = 30$ m/s die Flugbahnen von Bällen mit dem im Fußball häufig anzutreffenden Backspin (wenn, der Ball unter dem Schwerpunkt vom Fuß getroffen wird zB beim Abstoß) mit dem Topspin (beim Fußball eher selten - siehe Tennis) und der neutralen Flugbahn ohne Magnuskraft verglichen. Die Drehgeschwindigkeit ist $\omega := 3$ rad/s

$C := \pi^2 \cdot 1.3 \cdot \left(\frac{0.7}{2 \cdot \pi}\right)^3$ $C = 0.018$ $tmax := 4.1$ $tt := 0, 0.1 .. tmax$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vx(t) - C \cdot \omega \cdot vy(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g + C \cdot \omega \cdot vx(t)$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxb \\ vyb \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

Bei "Topspin" müssen die Vorzeichen der Magnuskraft geändert werden, da sich die Richtung von $\vec{\omega}$ umdreht.

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0) = v0 \cdot cos(\alpha) \qquad vy(0) = v0 \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vx(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vx(t) + C \cdot \omega \cdot vy(t)$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} vy(t) = -K \cdot \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \cdot vy(t) - m \cdot g - C \cdot \omega \cdot vx(t)$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} vxp \\ vyp \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} vx(t) \\ vy(t) \end{bmatrix}, tmax\right)$$

$$sxb(t) := \int_0^t vxb(t\_)\,\mathrm{d}t\_ \qquad syb(t) := \int_0^t vyb(t\_)\,\mathrm{d}t\_$$

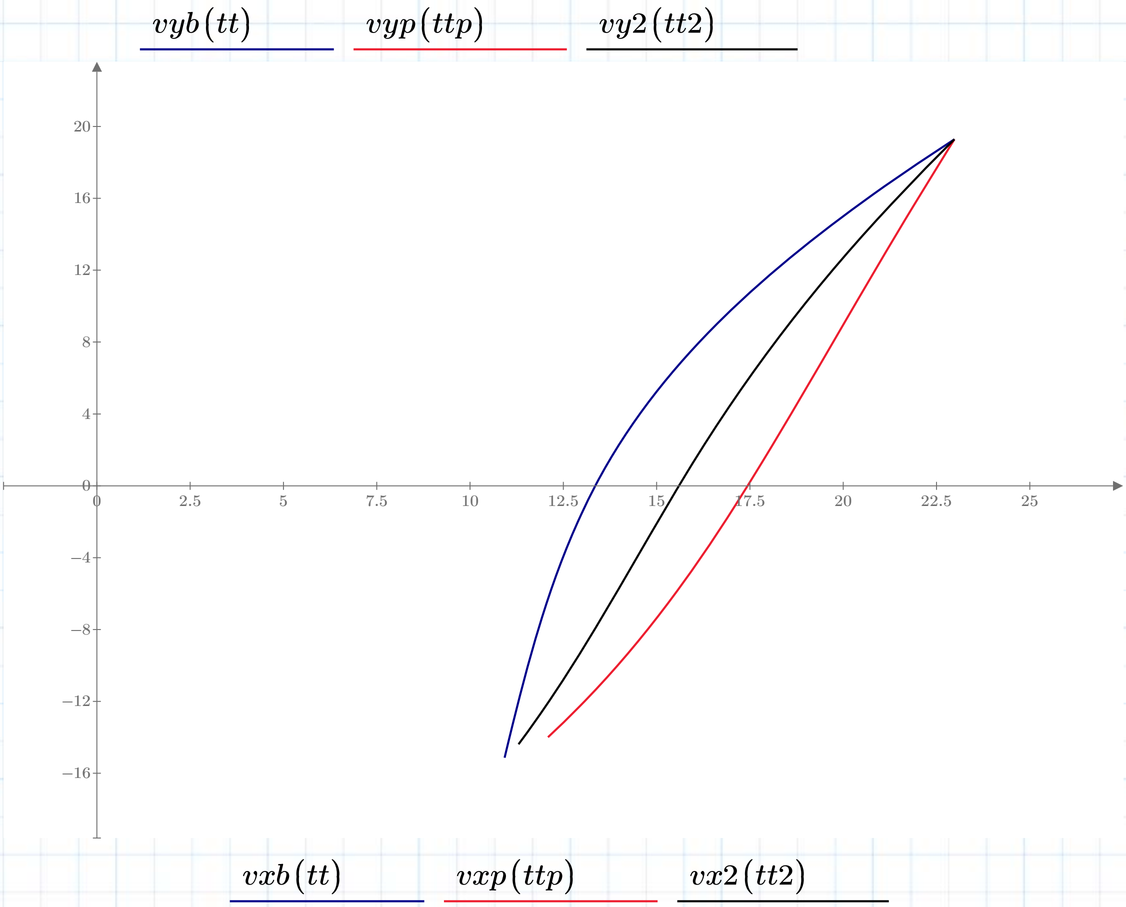
$$sxp(t) := \int_0^t vxp(t\_)\,\mathrm{d}t\_ \qquad syp(t) := \int_0^t vyp(t\_)\,\mathrm{d}t\_$$

$tb := \mathbf{root}(syb(t\_), t\_, 1, tmax)$ $\quad tb = 4.032$ $\quad sxb(tb) = 57.619$

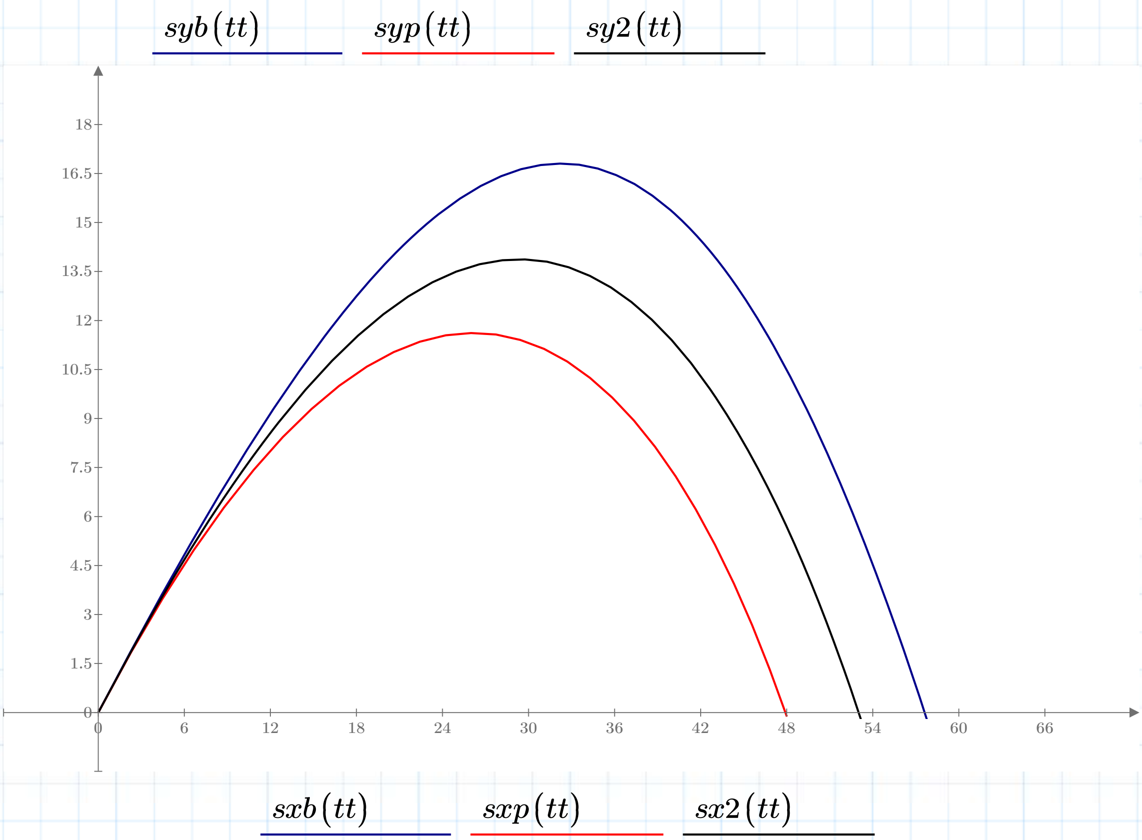
$tp := \mathbf{root}(syp(t\_), t\_, 1, tmax)$ $\quad tp = 2.792$ $\quad sxp(tp) = 47.913$

Aufgrund der unterschiedlichen Flugzeiten ist: $ttp := 0, 0.1 .. tp$

$tt2 := 0, 0.1 .. t2$

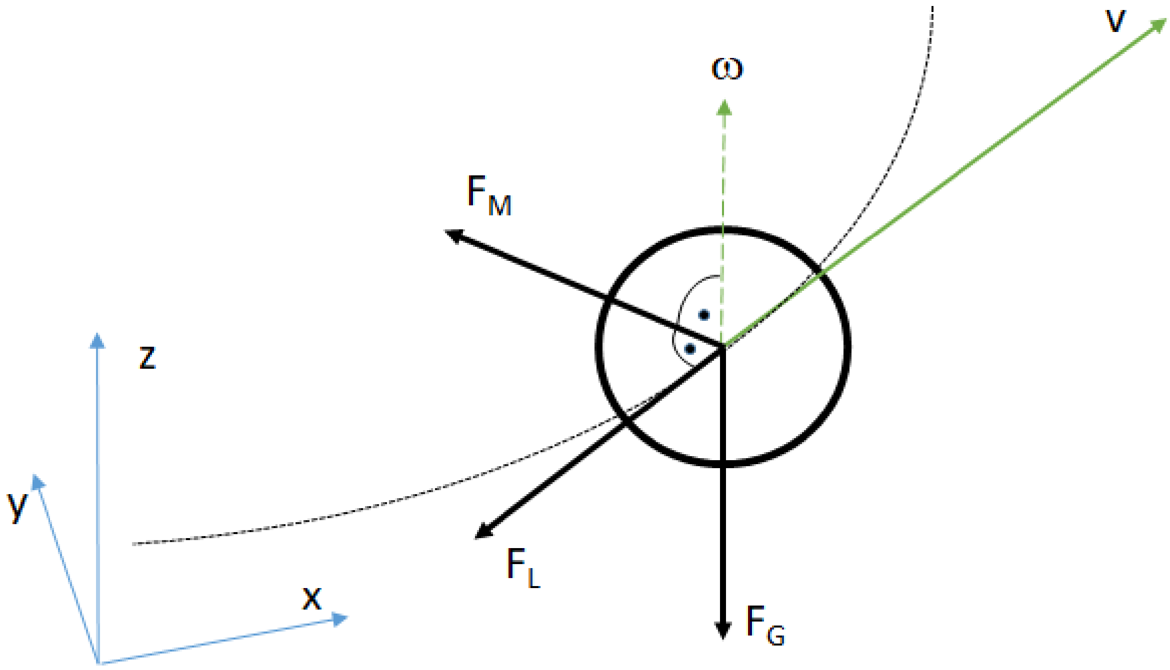


Die Krümmung der Geschwindigkeitskurven bei Backspin und Topspin ist unterschiedlich. Daher nimmt vx bei Backspin vor allem anfangs sehr stark ab, bei Topspin eher zum Ende der Flugbahn. Die Aufprallgeschwindigkeiten sind wieder relativ ähnlich.
Die Flugkurven unterscheiden sich deutlich hinsichtlich maximaler Höhe, Flugzeit und Wurfweite. Mit Backspin geschossene Bälle fliegen deutlich länger und weiter.
Vor allem bei (Tisch-)Tennis wird die Dralleigenschaft der Bälle eingesetzt um zwischen Defensive (lange Flugzeit) und Offensive (kurze Flugzeit) zu wechseln.
Im Fußball kommt der Backspin häufig bei weit geschlagenen Bällen vor (Abstoß), da in diesem Fall der Treffpunkt des Fußes in der unteren Hälfte des Balls liegt.



2.3.2 Differentialgleichung der Flugbahn mit Luftwiderstand und Magnuskraft (Rotationachse senkrecht und normal zur Flugrichtung)

Direkt verwandelte Eckbälle oder Freistöße erfreuen sich auf diversen Plattformen großer Beliebtheit. Grundlage dieser Flugbahnen ist ein Magnuseffekt, der sich aus einer Rotation des Balls um die senkrechte Achse ergibt. Die Magnuskraft bewirkt nun als Zentripedalkraft, dass der Ball (auch von oben betrachtet) eine gekrümmte Flugbahn beschreibt, welche die oben erwähnten Kunstschüsse möglich macht.



Die Differentialgleichung muss nun in 3D aufgestellt werden. Für die Komponenten der Luftwiderstandskraft gilt, dass diese den Seiten eines Quaders entsprechen, dessen Raumdiagonale $\overrightarrow{F_L}$ ist. Die Magnuskraft wirkt in der x-y Ebene und wird hier analog zu 2.2.1 berücksichtigt, wobei zwischen $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{\omega}$ kein rechter Winkel vorliegt. Wegen $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega} = v \cdot \omega \cdot sin(\alpha)$ und $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}}{\sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2 + vz(t)^2}}$ ist der Term hier etwas komplizierter.

Im Folgenden wird ein Schuss mit Abschussgeschwindigkeit $v0=30$ m/s unter einem Höhenwinkel von $\alpha:=20\,°$ sowie einem Horizontalwinkel $\beta:=-15\,°$ (Anfangsrichtung des Balls zur x-Achse um an der Mauer vorbei zu schießen; $\beta=0$ entspricht der direkten Verbingung des Start- und des Zielpunktes) betrachtet.
Die Anfangsbedingungen ergeben sich, wenn die Anfangsgeschwindigkeit als Raumdiagonale einer Quaders betrachtet wird mit den obigen Winkeln.

$tmax:=2$ $\qquad tt:=0,0.1..tmax$ $\qquad \omega:=3$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$vx(0)=v0\cdot cos(\alpha)\cdot cos(\beta)$$

$$vy(0)=v0\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta) \qquad vz(0)=v0\cdot sin(\alpha)$$

$$m\cdot\frac{d}{dt}vx(t)=-K\cdot\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2+vz(t)^2}\cdot vx(t)-\frac{C\cdot\omega\cdot vy(t)\cdot\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2}}{\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2+vz(t)^2}}$$

$$m\cdot\frac{d}{dt}vy(t)=-K\cdot\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2+vz(t)^2}\cdot vy(t)+\frac{C\cdot\omega\cdot vx(t)\cdot\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2}}{\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2+vz(t)^2}}$$

$$m\cdot\frac{d}{dt}vz(t)=-K\cdot\sqrt{vx(t)^2+vy(t)^2+vz(t)^2}\cdot vz(t)-m\cdot g$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix}vx3d\\vy3d\\vz3d\end{bmatrix}:=\mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix}vx(t)\\vy(t)\\vz(t)\end{bmatrix},tmax\right)$$

Nachfolgend werden die den Geschwindigkeitsfunktionen entsprechenden Wege durch Integration und die Flugweite und Flughöhe für jenen Zeitpunkt berechnet, zu dem der Ball wieder die xz Ebene schneidet (= Zielpunkt des Schusses).

$$sx3d(t):=\int_0^t vx3d(t\_)\,dt\_ \qquad sy3d(t):=\int_0^t vy3d(t\_)\,dt\_ \qquad sz3d(t):=\int_0^t vz3d(t\_)\,dt\_$$

$$tr:=\mathbf{root}(sy3d(t\_),t\_,1,tmax) \qquad tr=1.828 \qquad sx3d(tr)=39.089$$

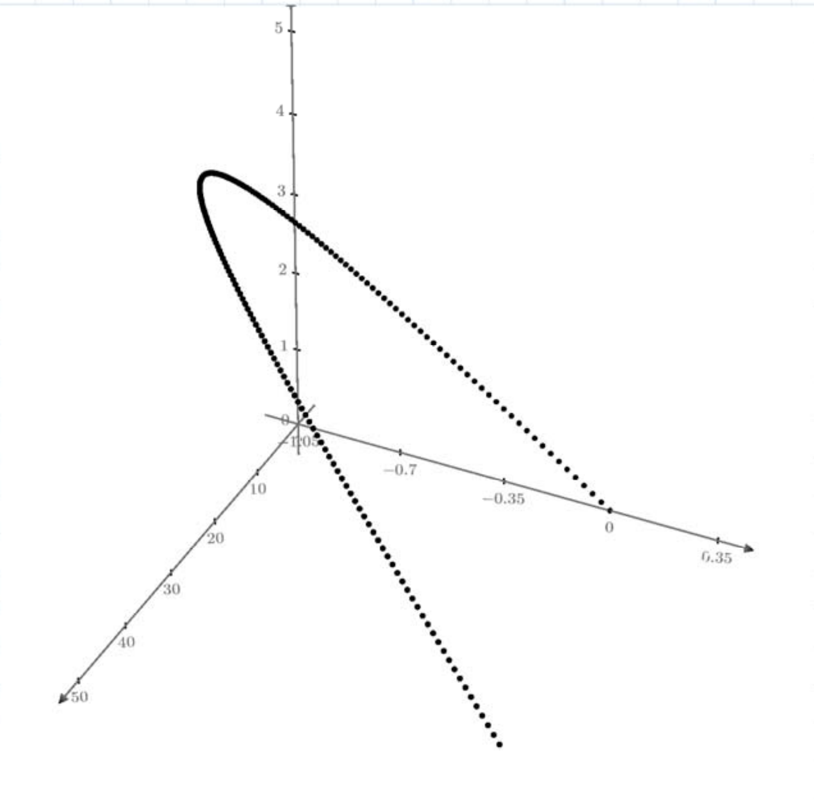
$$sz3d(tr)=0.561$$

Zur 3D-Darstellung der Flugbahn werden einzelne Punkte der Flugbahn im 3-spaltigen Vektor S bestimmt. Die unterschiedlichen Maßstäbe in den 3 Achsen verzerren die Darstellung.

$i := 0, 1 .. tmax \cdot 100 - 1$ $\quad N := tmax \cdot 100$

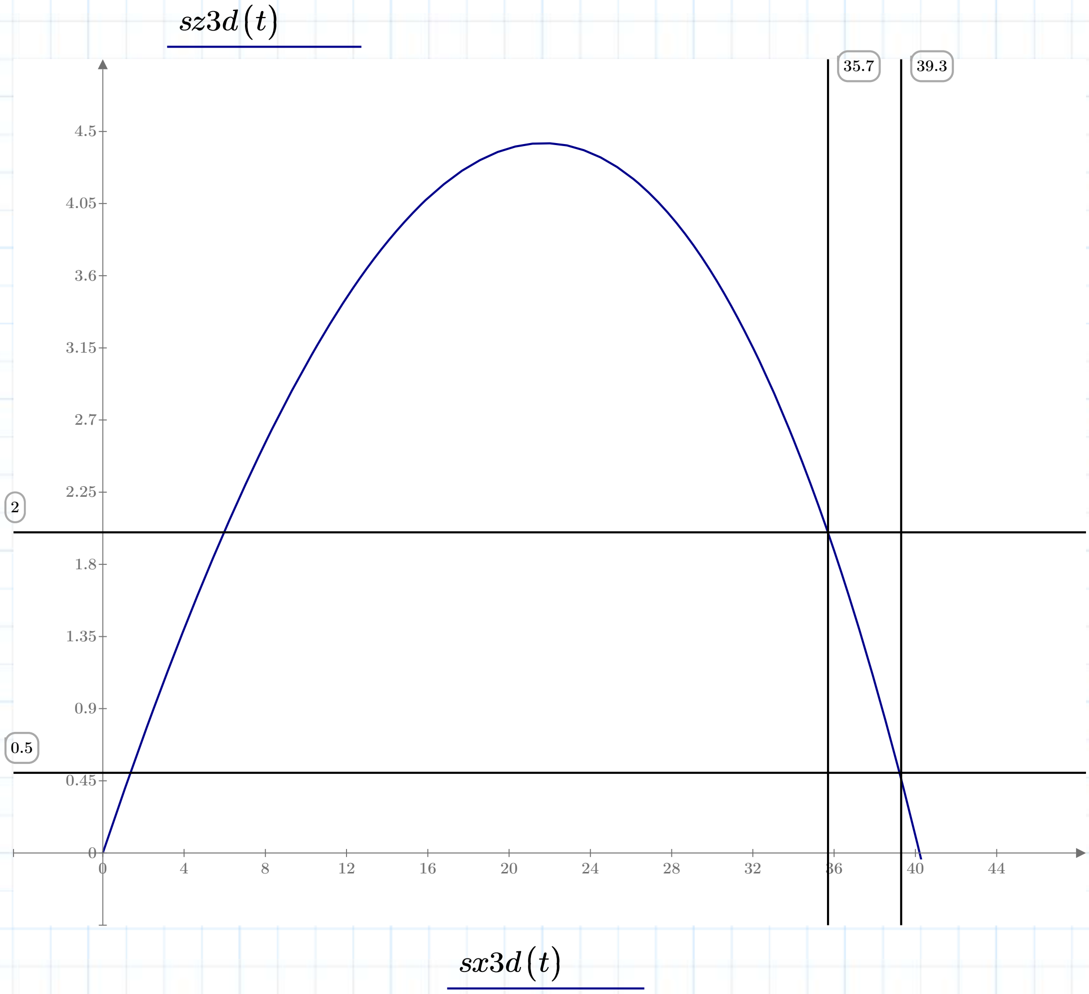
$t3d_i := \frac{tmax}{N} \cdot i$ $\quad \max(t3d) = 1.99$

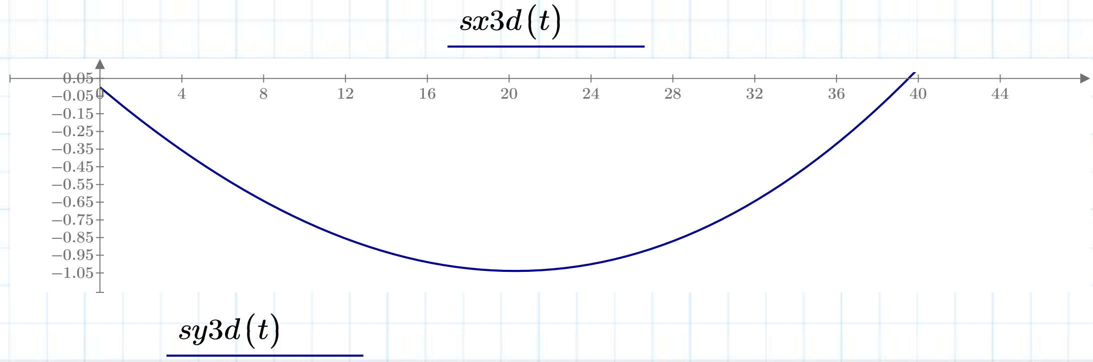
$S_{i,0} := sx3d(t3d_i)$ $\quad S_{i,1} := sy3d(t3d_i)$ $\quad S_{i,2} := sz3d(t3d_i)$



S

Die beiden nächsten Abbildungen zeigen den "Aufriss" (x-z) und den "Grundriss" (x-y) der Flugbahn. Die y- und die z- Achse sind ungefähr gleich skaliert. Die Flugbahn erreicht bei einer Schussweite von ca. 40 m eine maximale Höhe mehr als 4 Metern und weicht ca. 1 Meter von der direkten Verbindung von Start und Zielpunkt (= x-Achse) ab. Derartinge Flugbahnen sind beispielsweise bei direkt verwandelten Eckbällen oder auch Freistößen zu beobachten. Hier überquert der Ball die Torlinie in einer Höhe von ca. 0,5 m. Diese Höhe kann bis zu 2,4 m sein (Höhe des Fußballtors), aber die effektive Flugweite sinkt durch die zum Ende stark abfallende Flugkurve nur wenig.


sz3d(t)
35.7
39.3
2
0.5
sx3d(t)


sx3d(t)
sy3d(t)